ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 48 Межвузовский сборник научных трудов 2016

УДК 531.383

Ю.А. Годоров, С.В. Лутманов

Пермский государственный национальный исследовательский университет

Россия, 614990, Пермь, ул. Букирева, 15
mpu@psu.ru; (342) 2-396-309

КОМПЕНСАЦИЯ МЕТОДИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ, ВЫЗВАННЫХ КОНИЧЕСКИМ ДВИЖЕНИЕМ БЕСПЛАТФОРМЕННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Разработан алгоритм вычисления коэффициентов линейного тренда, соответствующего методической ошибке в случае конического движения. Показано, что учет указанного тренда позволяет эффективно устранять неточность при определении углов ориентации твердого тела.

Ключевые слова: инерциальные навигационные системы; коническое движение; углы Эйлера–Крылова; линейный тренд.

Введение

С тех пор, как системы инерциальной навигации стали связывать между собой электронно-вычислительные машины (ЭВМ), ученые-приборостроители стали замечать, что при некоторых видах вибрационного воздействия во время движения объекта в выходной информации об угловом положении появляется постоянное смещение. Это смещение является следствием не коммутативности поворотов и не является ошибкой прибора. Указанную ошибку назвали конической ошибкой, так как одна из осей связанной с телом при этом движении описывает

© Годоров Ю. А., Лутманов С. В., 2016

конус. Основное направление учета возникающей ошибки – синтезировать новые алгоритмы, компенсирующие данную погрешность. Некоторые результаты исследований, посвященных этой проблеме, приведены ниже.

В работе [5] автор предлагает включать в расчет при синтезе алгоритмов ориентации динамические характеристики гироскопов. В статье [8] предлагается осуществить повышение точности навигационных алгоритмов путем перевода в частотную область, разделенной на блоки выходной информации с акселерометров и гироскопов. В другой работе [3] синтезированы, и протестированы в условиях конического движения, алгоритмы ориентации различных видов и порядков точности. В [6] установлена зависимость величины конической ошибки от "шаговости" алгоритма ориентации и показан способ их синтеза.

Настоящая статья является продолжением работы [2]. В ней предложены способы постобработки результатов вибрационных испытаний, в которых наблюдается коническое движение, с целью компенсации конической ошибки. Для имитации результатов вибрационных испытаний был разработан метод моделирования выходных дискретных данных с датчиков угловых скоростей и реализован алгоритм нахождения коэффициентов линейного тренда, соответствующего методической ошибке при коническом движении. Введен критерий оценки качества эксперимента.

1. Постановка задачи ориентации твердого тела в абсолютном пространстве и ее решение

В данной статье принимается, что за ориентацию тела в абсолютном пространстве отвечают углы Эйлера–Крылова (см. рис. 1) , которые образуют оси координат, подвижной системы, связанной с телом и системы отсчета, движущейся поступательно по отношению к абсолютной системе [4].

Задача ориентации твердого тела в абсолютном пространстве в нашей постановке состоит в определении законов изменения углов Эйлера–Крылова в функции времени.

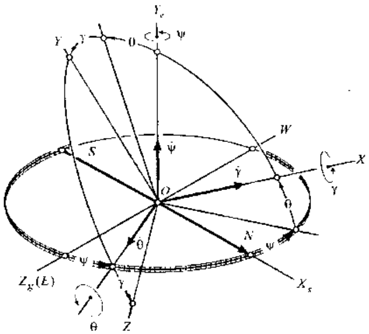

Рис. 1. Взаимное положение связанной
и абсолютной систем координат

Для решения этой задачи в процессе движения тела измеряются величины p, q, r – проекции вектора угловой скорости тела на оси подвижной системы координат. Подставляя полученные законы угловых скоростей в кинематические уравнения Эйлера–Крылова [1]

$$\begin{aligned} &\dot{\psi} = \frac{1}{\cos\theta}\left[q\cos\gamma - r\sin\gamma\right], \\ &\dot{\theta} = q\sin\gamma + r\cos\gamma, \qquad , \\ &\dot{\gamma} = p - tg\theta\left[q\cos\gamma - r\sin\gamma\right] \end{aligned} \tag{1.1}$$

связывающие выбранные параметры ориентации с проекциями вектора угловой скорости, и интегрируя их с соответствующими начальными условиями, определяем искомые законы изменения указанных параметров (углов Эйлера–Крылова).

2. Описание численного эксперимента

В виду отсутствия натурных данных предлагается следующая схема имитации натурного эксперимента. Задается некоторый закон вращения тела

$$\psi = \psi^{эт}(t), \theta = \theta^{эт}(t), \gamma = \gamma^{эт}(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{2.1}$$

который в дальнейшем будет называться эталонным. Разрешая уравнения (1.1) относительно проекций вектора угловых скоростей p,q,r и подставляя в полученные формулы эталонный закон (2.1), находим

$$\begin{aligned} &p^{эт}(t)=\dot{\gamma}^{эт}(t)+\dot{\psi}^{эт}(t)\sin\theta^{эт}(t),\\ &q^{эт}(t)=\dot{\psi}^{эт}(t)\cos\gamma^{эт}(t)\cdot\cos\theta^{эт}(t)+\\ &+\dot{\theta}^{эт}(t)\cdot\sin\gamma^{эт}(t),\\ &r^{эт}(t)=\dot{\theta}^{эт}(t)\cdot\cos\gamma^{эт}(t)-\\ &-\dot{\psi}^{эт}(t)\cdot\cos\theta^{эт}(t)\cdot\sin\gamma^{эт}(t). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Формулы (2.2) описывают непрерывный закон изменения проекций вектора угловой скорости. Реальные измерения в силу своей дискретности не позволяют получить зависимости (2.2) в полном объеме. В силу этой причины на базе формул (2.2) нарабатывается трехмерный массив значений проекций вектора угловой скорости с шагом, отвечающим частоте сбора информации датчиками.

Далее производится интерполяция дискретных данных. Полученные интерполяционные полиномы

$$p=p^{изм}(t),\, q=q^{изм}(t)\, r=r^{изм}(t)$$

подставляются в правые части дифференциальных уравнений (1.1). В результате получается

$$\begin{aligned} &\dot{\psi}=\frac{1}{\cos\theta}\left[q^{изм}(t)\cos\gamma-r^{изм}(t)\sin\gamma\right],\\ &\dot{\theta}=q^{изм}(t)\sin\gamma+r^{изм}(t)\cos\gamma,\\ &\dot{\gamma}=p^{изм}(t)-tg\theta\left[q^{изм}(t)\cos\gamma-r^{изм}(t)\sin\gamma\right]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Интегрируя уравнения (2.3) с начальными условиями

$$\psi(t_0)=\psi^{эт}(t_0),\, \theta(t_0)=\theta^{эт}(t_0),\, \gamma(t_0)=\gamma^{эт}(t_0)$$

находим нулевое приближение

$$\psi=\psi^{0}(t),\, \theta=\theta^{0}(t),\, \gamma=\gamma^{0}(t),\quad t\in[t_0,T] \tag{2.4}$$

для закона изменения углов Эйлера–Крылова. Качество этого приближения будем оценивать функционалами

$$I_{\psi}\left[\psi^{0}(\cdot)\right]=\left[\frac{\int_{t_0}^{T}\left(\psi^{0}(\tau)-\psi^{эт}(\tau)\right)^{2}d\tau}{\int_{t_0}^{T}\left(\psi^{эт}(\tau)\right)^{2}d\tau}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$I_{\theta}\left[\theta^{0}(\cdot)\right]=\left[\frac{\int_{t_0}^{T}\left(\theta^{0}(\tau)-\theta^{эт}(\tau)\right)^{2}d\tau}{\left[\int_{t_0}^{T}\left(\theta^{эт}(\tau)\right)^{2}d\tau\right]}\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (2.5)$$

$$I_{\gamma}\left[\gamma^{0}(\cdot)\right]=\left[\frac{\int_{t_0}^{T}\left(\gamma^{0}(\tau)-\gamma^{эт}(\tau)\right)^{2}d\tau}{\int_{t_0}^{T}\left(\gamma^{эт}(\tau)\right)^{2}d\tau}\right]^{\frac{1}{2}},$$

Очевидно, что чем меньше их значения, тем точнее алгоритм определения изменения углов Эйлера–Крылова.

3. Коническое движение

Коническое движение – особый вид колебательного движения, при котором одна ось связанной системы координат описывает конус, а две других движутся по гармоническому закону со сдвигом фаз в 90^{o} [7].

Основные параметры этого движения: $\Delta\Phi$ – угол раствора конуса и f – частота, с которой движется ось, его описывающая.

Структура конического движения показана на рис. 2.

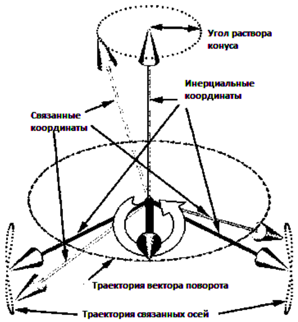

Рис. 2. Структура конического движения

Закон вращения тела, отвечающий коническому движению, как было установлено в работе [2], имеет вид

$$\psi^{эт}(t) = arctg\left(-\frac{2\cos(2f\pi t)\cdot\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)}{-1+2\cos^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)} \right),$$

$$\theta^{эт}(t) = \arcsin\left(2\cos\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)\cdot\sin(2f\pi t)\right),$$

$$\gamma^{эт}(t) = \tag{3.1}$$

$$= -arctg\left(\frac{2\cos(2f\pi t)\cdot\sin(2f\pi t)\cdot\sin^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)}{-1+2\cos^2(2f\pi t)+2\cos^2(2f\pi t)\cdot\sin^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)}\right).$$

Для закона движения (3.1) при $\Delta\Phi = \frac{\pi}{180}\,рад$, $f = 100\frac{1}{сек}$, $t_0 = 0, T = 1сек$ был проведен численный эксперимент, описанный в предыдущем пункте. Имитация съема информации с датчиков в этом эксперименте соответствовала частоте 400Гц. Как уже отмечалось выше, в случае конического движения нулевое приближение (2.4) вычисляется с ошибкой. Особенно эта ошибка велика для функции $\gamma = \gamma^0(t), \quad t \in [t_0, T]$. Приведем результаты проведенного эксперимента. На рис. 3, 4 показаны графики функций $\gamma = \gamma^{эт}(t)$ и $\gamma = \gamma^0(t)$, соответственно.

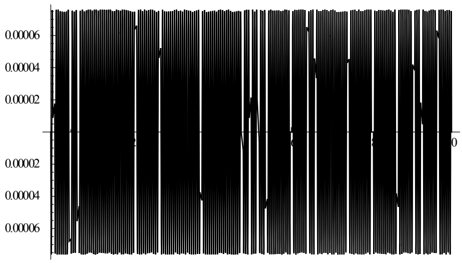

Рис. 3. График функции $\gamma = \gamma^{эт}(t)$

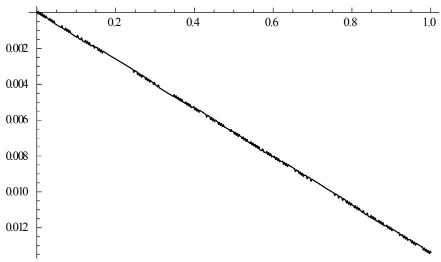

Рис. 4. График функции $\gamma = \gamma^0(t)$

На графиках хорошо видно, что нулевое приближение смещается вниз по отношению к эталонному движению, что обуславливает значительную ошибку при вычислении угла $\gamma = \gamma^0(t)$. Этот вывод подтверждает и величина критерия

$$I_\gamma\left[\gamma^0(\cdot)\right] = 143.637\,.$$

4. Алгоритм коррекции нулевого приближения

Предполагая, что нулевое приближение $y^0(t)$ на промежутке времени $[t_0, T]$ представляет собой сумму колебательной составляющей $y(t)$ и линейного тренда $at + b$, т.е. что

$y^0(t) = y(t) + at + b$, приведем алгоритм определения коэффициентов a и b тренда, считая функцию $y^0(t), t \in [t_0, T]$ известной.

Вычисляем

$$y_{\max 1} = \max_{t \in \left[t_0, \frac{t_0+T}{2}\right]} y^0(t), \quad y_{\max 2} = \max_{t \in \left[\frac{t_0+T}{2}, T\right]} y^0(t),$$

$$y_{\min} = \min_{t \in [t_0, T]} y^0(t),$$

$$t_{\max 1} : y_{\max 1} = y(t_{\max 1}), \quad t_{\max 2} : y_{\max 2} = y(t_{\max 2}),$$

$$t_{\min} : y_{\min} = y(t_{\min}).$$

Обозначим через amp амплитуду колебательной составляющей. Тогда

$$\begin{cases} y_{\max 1} = at_{\max 1} + b + amp, \\ y_{\max 2} = at_{\max 2} + b + amp \end{cases} \Rightarrow$$

$$y_{\max 1} - y_{\max 2} = a(t_{\max 1} - t_{\max 2}) \Rightarrow,$$

$$\hat{a} = \frac{y_{\max 1} - y_{\max 2}}{t_{\max 1} - t_{\max 2}}, \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} y_{\max 1} = at_{\max 1} + b + amp, \\ y_{\min} = at_{\min} + b - amp \end{cases} \Rightarrow$$

$$y_{\max 1} + y_{\min} = a(t_{\max 1} + t_{\min}) + 2b \Rightarrow$$

$$\hat{b} = \frac{y_{\max 1} + y_{\min} - a(t_{\max 1} + t_{\min})}{2}. \tag{4.2}$$

Нулевое приближение теперь может быть откорректировано по формуле

$$y^{кор}(t) = y^0(t) - (\hat{a}t + \hat{b}). \tag{4.3}$$

Проведем коррекцию нулевого приближения $\gamma^0(t), t \in [t_0, T]$, полученного в эксперименте предыдущего пункта, по формулам (4.1)–(4.3). Имеем

$$\hat{a}_\gamma = \text{-}0.01347, \quad \hat{b}_\gamma = 0.00005.$$

На рис. 5, 6 показаны графики функций $\gamma^{кор}(t)$ и $\gamma^{эт}(t)$ соответственно.

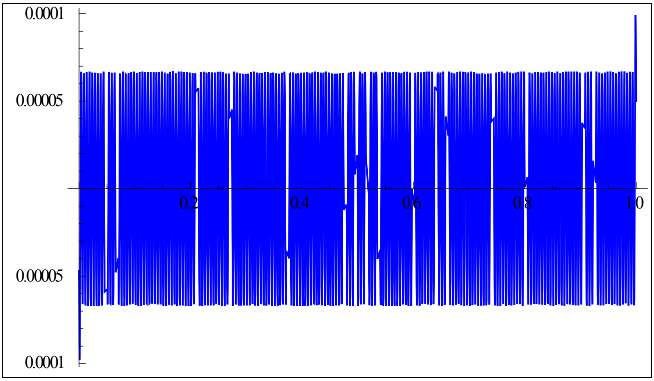

Рис. 5. График функции $\gamma = \gamma^{кор}(t)$

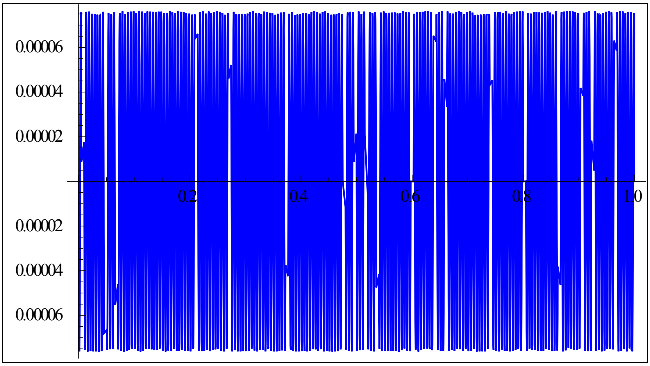

Рис. 6. График функции $\gamma = \gamma^{эт}(t)$

На рисунках видна близость функций $\gamma^{эт}(t)$ и $\gamma^{кор}(t)$. Факт близости подтверждается и величиной критерия качества

$$I_{\gamma}\left[\gamma^{кор}(\cdot)\right] = 0.123842,$$

которая оказалась на три порядка меньше, чем для нулевого приближения.

5. Случай наличия гладкой составляющей в движении тела

Рассмотрим случай, когда на промежутке наблюдения тело совершает гладкое движение, на которое, начиная с некоторого момента времени, накладывается коническая составляющая. Предполагается, что промежуток наблюдения столь мал, что гладкую составляющую движения можно считать линейной. Проведем корректировку нулевого приближения функции γ на отрезке действия конической составляющей.

Полагаем

$$\gamma^{эт}(t)=\begin{cases} a_\gamma t+b_\gamma, & t\in[t_0,t_*] \\ \gamma^{к}(t)+a_\gamma t+b_\gamma, & t\in[t_*,T] \end{cases}.$$

Здесь $[t_0,T]$– промежуток наблюдения, t_* – момент времени возникновения конической составлявшей движения, $a_\gamma t+b_\gamma$ – гладкая составляющая движения,

$$\gamma^{к}(t) = -arctg\left(\frac{2\cos(2f\pi t)\cdot\sin(2f\pi t)\cdot\sin^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)}{-1+2\cos^2(2f\pi t)+2\cos^2(2f\pi t)\cdot\sin^2\left(\frac{\Delta\Phi}{2}\right)}\right)$$

– коническая составляющая движения.

На промежутке времени $[t_0,t_*]$ коническое движение отсутствует, и нулевое приближение практически совпадает с эталонным движением. Этот факт позволяет определить коэффициенты a_γ, b_γ с достаточной степенью точности. Далее по формулам (4.1), (4.2) вычисляются коэффициенты тренда $\hat{a}_\gamma, \hat{b}_\gamma$.

В соответствии с этим трендом происходит смещение нулевого приближения от конической составляющей на отрезке времени $[t_*,T]$. В заключении производится коррекция нулевого приближения по формуле

$$\gamma^{кор}(t)=\begin{cases} \gamma^0(t), & t\in[t_0,t_*] \\ \left(\gamma^0(t)-\hat{a}_\gamma t-\hat{b}_\gamma\right)+a_\gamma t+b_\gamma, & t\in[t_*,T] \end{cases}.$$

Ниже приводятся результаты расчетов при следующих числовых данных $\left[t_0, T\right] = \left[-1, 1\right], \quad t_* = 0, \quad a_\gamma = -0.05, b_\gamma = 0.5$.

Имеем $\hat{a}_\gamma = \text{-}0.01347, \quad \hat{b}_\gamma = 0.00005$.

На рис. 7 представлены графики эталонного и откорректированного движения, а на рис. 8 – графики эталонного движения и его нулевого приближения.

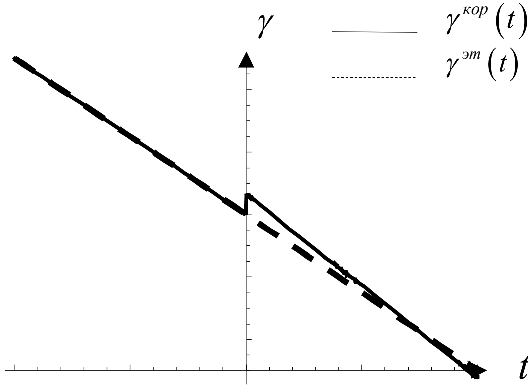

Рис. 7. Графики функций $\gamma^{эт}(t)$ и $\gamma^{кор}(t)$

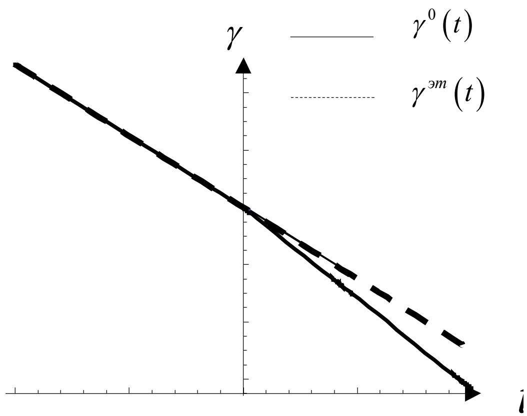

Рис. 8. Графики функций $\gamma^{эт}(t)$ и $\gamma^{0}(t)$

Из приведенных графиков видно, что откорректированное нулевое приближение аппроксимирует эталонное движение лучше, чем просто нулевое приближение. Этот факт подтверждается и значениями критерия, вычисленными на нулевом и откорректированном нулевом приближениях

$$I_\gamma\left[\gamma^0(\cdot)\right]=0.0109768\,,\ I_\gamma\left[\gamma^{кор}(\cdot)\right]=0.00474172\,.$$

Библиографический список

1. *Бранец, В.Н., Шмыглевский И.П.* Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. М.: Наука, 1992. 280 с.

2. *Годоров Ю.А., Лутманов С.В.* Анализ методических погрешностей, вызванных коническим движением бесплатформенных инерциальных навигационных систем // Проблемы механики и управления: межвуз. сб. науч. тр. Пермь, 2015. Вып.47. С. 4–16.

3. *Кивокурцев А.Л.* Повышение эксплуатационной надежности интегрированного комплекса бортового оборудования на основе реконфигурации его вычислительно системы: дис… канд. тех. наук. МГТУ ГА. Москва, 2014.

4. *Матвеев В.В.* Основы построения бесплатформенных инерциальных систем. СПб.: ГНЦ РФ ОАО "Концерн "ЦНИИ Электроприбор", 2009. 280 с.

5. *Слюсарь В.М.* О повышении точности алгоритмов ориентации: матер. XII Санкт-Петербург. междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. СПб.: ЦНИИ "Электроприбор", 2005. С. 150–154.

6. *Mark J.G., Tazartes D.A.* Application of coning algorithms to frequency shaped data. 6^{th} Saint Petersburg international conference of integrated navigation systems, Saint Petersburg, 1999.

7. *Salychev O.* Inertial Systems in Navigation and Geophysics. Moscow: Bauman MSTU Press, 1998. 352 p.

8. *Soloviev A., F. van Graas.* Performance enhancement of GPS/INS systems by frequency-domain implementation of INS algorithmic part, Avionics Engineering Center, Ohio University, Stocker Center, Athens, OH, USA.